

A Lecture Note on Center Manifolds in Engineering Science

中心多様体初等講義

野原 勉
森田 和子

中心多様体初等講義^{*1}

自然科学系 数学教育部門 野原 勉
森田 和子

1 はじめに

制御系設計における第一義的目的地はその安定判別にある^{*2}。制御系設計理論は最適制御理論⁽¹⁾⁽⁸⁾から H_∞ 制御⁽⁶⁾にいたるまで線形理論が確立されているが、あくまで線形系が理論の対象である。しかし、現実の設計では対象が非線形になることがほとんどである。この非線形系の安定判別には、その平衡点まわりにおける線形化方程式の係数行列の固有値で判別する方法がよく使われる。この方法は固有値が双曲型の場合は非線形系にもその構造が引き継がれるため、線形化方程式の安定判別だけでもととの非線形系の安定判別が可能となる^{*3}。しかし、非双曲型の場合には、構造安定ではないので、別の方法が必要となる。

その方法として、Lyapunov 関数を使用する「Lyapunov の安定論」があり、制御工学では Lyapunov 安定論が多く使われている。すなわち、「(狭義の) Lyapunov 関数が存在すれば系は(漸近)安定」である事実に基づくが、実際には系が複雑になると、Lyapunov 関数を求める系統だった手段が存在しないため、Lyapunov 関数を構成する(見つける)ことは困難である。そこで、係数行列の固有値実部が 0 に対する中心多様体を考えることにより安定判別をしようというものである。

この稿は、工学部ではなじみのうすい中心多様体について出来る限り初等的に解説し、Lyapunov の安定論との比較をする。

2 安定・不安定の定義⁽³⁾

D を空間 $\mathcal{R}^n$ の領域とし、 f を D 上で定義された $\mathcal{R}^n$ 値関数とし、 D の中に値をもつ未知関数 $x(t)$ に対する微分方程式

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

を考える。

定義 2.1 (Lyapunov の意味での安定性) x^* を (2.1) の平衡点とする。

(1) x^* が安定であるとは、どんな小さな正の数 ε を与えても、正の数 δ を十分小さく選べば $|x(0) - x^*| < \delta$ をみたす (2.1) の任意の解 $x(t)$ に対して

$$|x(t) - x^*| < \varepsilon \quad (\forall t \geq 0) \quad (2.2)$$

が成り立つようにできることをいう。

(2) x^* が不安定であるとは、 x^* が安定でないことをいう。

(3) x^* が漸近安定であるとは、 x^* が安定でかつ $\delta_0 > 0$ を適当に選べば、

$|x(0) - x^*| < \delta_0$ をみたす (2.1) の任意の解 $x(t)$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^* \quad (2.3)$$

が成り立つようにできることをいう。

定理 2.1 x^* を (2.1) の平衡点とし、 $f'(x^*)$ の固有値の実部の最大値を $\lambda_{\max}$ とおく。

(1) $\lambda_{\max} < 0$ ならば x^* は漸近安定である。また、正の定数 a, c が存在して、 x^* の十分近くから出発した任意の解 $x(t)$ に対してつぎの評価式が成り立つ。

$$|x(t) - x^*| \leq c e^{-at} |x(0) - x^*| \quad (\forall t \geq 0) \quad (2.4)$$

(2) $\lambda_{\max} > 0$ ならば x^* は不安定である。

注意 2.1 (1) $\lambda_{\max} < 0$ ($\lambda_{\max} > 0$) をみたす平衡点を線形安定 (線形不安定) な平衡点と呼ぶことがある。

(2) (2.4) が成り立つものを指数安定な平衡点という (線形安定と指数安定は同値である)。

(3) $\lambda_{\max} = 0$ のときはその平衡点は中立安定であるという。中立安定な平衡点の安定性については、定理 2.1 は何も語っていない。

定義 2.2 (Lyapunov 関数) (2.1) において、関数 $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ は平衡点 x^* の近傍 U に対して

(1) $V(x^*) = 0$ でありかつ U 内の任意の $x \neq x^*$ に対して $V(x) > 0$ である。

(2) U 内の任意の x に対して $\dot{V}(x) \leq 0$ である。

の 2 つの条件が満たされるとき、関数 V を x^* に対する Lyapunov 関数という。

また、より強い条件である

(2)' U 内の任意の $x \neq x^*$ に対して $\dot{V}(x) < 0$ である。

が満たされるとき、関数 V を狭義の Lyapunov 関数という。

定理 2.2 (Lyapunov の安定定理) x^* に対して Lyapunov 関数が存在すれば x^* は安定である。また, x^* に対して狭義の Lyapunov 関数が存在すれば x^* は漸近安定である。

定理 2.3 (Lyapunov の不安定定理⁽¹⁾) x^* のある近傍 U において

- (1) $V(x)$ は x に関して連続な偏導関数をもつ。
 - (2) $V(x^*) = 0$ で $x \neq x^*$ のとき $V(x) > 0$ となる点が存在する。
 - (3) $\dot{V}(x) > 0$ である。
- とき不安定である。

例 2.1

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 y \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

線形化方程式の係数行列の固有値は $\lambda_{1,2} = \pm i$ であり, $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$ となるので線形化された系 ($\varepsilon = 0$) は中立安定であるが, この構造は非線形系 ($\varepsilon \neq 0$) には保存されない。したがって, 非線形系である (2.5) の安定性は縮退した線形系からは何も結論を得ることができない。しかし, この場合, Lyapunov 関数を容易に構成できてつぎのようになる。

(1) $\varepsilon > 0$ の場合: $V(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ とすると, $V(x, y) > 0$ ($\forall x, y \neq 0$) となり, $\dot{V} = -\varepsilon x^2 y^2 < 0$ ($\forall x, y \neq 0$) を得て, V は狭義の Lyapunov 関数の要件を満たし定理 2.2 により, (2.5) の平衡点 $(0, 0)$ は漸近安定である。しかも, この場合大域的漸近安定となる。

(2) $\varepsilon < 0$ の場合: (1) と同じ V を構成し, 定理 2.3 により不安定である。■

3 安定多様体・不安定多様体, 中心多様体⁽²⁾⁽⁵⁾

3.1 安定多様体・不安定多様体

非線形方程式 (2.1) の解で初期条件 $x(0) = \eta$ をみたすものを

$$x(t; \eta) \quad (3.1)$$

と書くことにする。

定義 3.1 (2.1) の平衡点 x^* に対して

- (1) x^* の安定集合とは,

$$W^s(x^*) = \{\eta \in D \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; \eta) = x^*\} \quad (3.2)$$

(2) x^* の不安定集合とは,

$$W^u(x^*) = \{\eta \in D \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t; \eta) = x^*\} \quad (3.3)$$

とくに $W^s(x^*)$ や $W^u(x^*)$ が多様体⁴の構造をもつとき, 安定多様体, 不安定多様体という。

注意 3.1 (3.2) と (3.3) において, η を平衡点 x^* の近傍 U にとれば

$$W_{loc}^s(x^*) = \{\eta \in U \mid \lim_{t \rightarrow \infty} x(t; \eta) = x^*\} \quad (3.4)$$

$$W_{loc}^u(x^*) = \{\eta \in U \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t; \eta) = x^*\} \quad (3.5)$$

となり, それぞれ 局所安定多様体, 局所不安定多様体という。

命題 3.1 (2.1) で $n = 2$ であるとする。このとき, つぎのことがいえる。

- (1) 平衡点 x^* が沈点であれば, $W^s(x^*)$ は x^* の近くの点をすべて含む。一方, 沈点の不安定集合は沈点自身である。すなわち, $W^u(x^*) = \{x^*\}$ である。
- (2) 平衡点 x^* が湧点であれば, $W^u(x^*)$ は x^* の近くの点をすべて含み, 一方, 湧点の安定集合は湧点自身である。すなわち, $W^s(x^*) = \{x^*\}$ である。
- (3) 平衡点 x^* が鞍点であれば, $W^s(x^*)$ も $W^u(x^*)$ も平衡点 x^* の近傍では滑らかな曲線になる。点 x^* における $W^s(x^*)$ ($W^u(x^*)$) の曲線の接線は $f'(x)$ の負 (正) の固有値に属する固有ベクトルに平行である。

定義 3.2 (強 (不) 安定集合) (2.1) において, $t \rightarrow \infty$ のとき解 $x(t; \eta)$ が適当な定数 $\alpha > 0$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} |x(t; \eta) - x^*| = 0 \quad (3.6)$$

が成り立つとき, 解は平衡点 x^* に⁵指数的に引き寄せられるといい, 集合

$$W^{ss}(x^*) = \{\eta \in D \mid \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} |x(t; \eta) - x^*| = 0 \text{ for } \alpha > 0\} \quad (3.7)$$

を x^* の強安定集合という。また, $t \rightarrow -\infty$ のときは

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\alpha t} |x(t; \eta) - x^*| = 0 \quad (3.8)$$

が成り立つとき, 解は平衡点 x^* に⁵指数的に引き寄せられるといい, 集合

$$W^{uu}(x^*) = \{\eta \in D \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-\alpha t} |x(t; \eta) - x^*| = 0 \text{ for } \alpha > 0\} \quad (3.9)$$

を x^* の強不安定集合という。

$\mathcal{R}^n$ の部分空間 E^s, E^u, E^c *5を

$E^s = \{f'(x^*) \text{ の一般固有ベクトルの中で実部が負の固有値に属するもの全体で張られる空間} \}$
 $E^u = \{f'(x^*) \text{ の一般固有ベクトルの中で実部が正の固有値に属するもの全体で張られる空間} \}$
 $E^c = \{f'(x^*) \text{ の一般固有ベクトルの中で実部が } 0 \text{ の固有値に属するもの全体で張られる空間} \}$

で定義する*6。これらの間には直和分解

$$\mathcal{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c \quad (3.10)$$

が成り立つ。

定理 3.1 (命題 3.1 の一般化) x^* を方程式 (2.1) の平衡点とする。このとき, $W^{ss}(x^*)$ と $W^{uu}(x^*)$ はいずれも点 x^* の近傍では滑らかな多様体であり, 点 x^* におけるこれらの接空間*7 に対して

$$T_{x^*} W^{ss}(x^*) = E^s, \quad T_{x^*} W^{uu}(x^*) = E^u \quad (3.11)$$

が成り立つ。

注意 3.2 方程式が線形で $x^* = 0$ のときには, $W^{ss}(0) = E^s, W^{uu}(x^*) = E^u$ となる。

3.2 中心多様体

平衡点が双曲型でないとき, すなわち, $E^c \neq \{0\}$ のとき, 点 x^* の近傍でつぎの性質を持つ多様体 $W^c(x^*)$ が構成できる。

- (1) $W^c(x^*)$ は局所不変*8。
 - (2) 点 x^* における $W^c(x^*)$ の接空間に対して $T_{x^*} W^c(x^*) = E^c$ が成立。
- 上の性質 (1),(2) をもつ多様体 $W^c(x^*)$ を平衡点 x^* の**中心多様体**という。

注意 3.3 $W^c(x^*)$ は解の挙動では定義できない。

4 中心多様体定理

定理 4.1 ⁽⁷⁾ (2.1) において, 平衡点は原点に持ち, f は $k \geq 1$ の C^k ベクトル場とし, $Df(0) = A$ の固有空間は $E^s \oplus E^u \oplus E^c$ と書かれるものとする。このとき, 原点のある近傍にてつぎの C^k 不変多様体が存在する。

- (1) E^s に接する局所安定多様体 $W_{loc}^s(0)$. $W_{loc}^s(0)$ 上では $|x(t)| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) となる。
- (2) E^u に接する局所不安定多様体 $W_{loc}^u(0)$. $W_{loc}^u(0)$ 上では $|x(t)| \rightarrow 0$ ($t \rightarrow -\infty$) となる。
- (3) E^c に接する中心多様体 $W^c(0)$.

定理 4.1 の証明はかなり厄介である⁽⁵⁾。

今, 新たに従属変数を x, y, z とし (2.1) をつぎのように書き換えられたとする。

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + F(x, y, z), \\ \dot{y} = Sy + G(x, y, z), \\ \dot{z} = Uz + H(x, y, z) \end{cases} \quad (4.1)$$

ここで, C は $Df(0)$ の固有値実部が 0 に相当する特性を表す正方行列であり, S (U) は $Df(0)$ の固有値実部が負 (正) に相当する特性を表す正方行列である。また, $\dim(x) = \dim(E^c)$, $\dim(y) = \dim(E^s)$, $\dim(z) = \dim(E^u)$ とする ($n = \dim(x) + \dim(y) + \dim(z)$)。中心多様体 $W^c(0)$ は E^c 上でのグラフなので, 写像 $g : E^c \rightarrow E^s$ と写像 $h : E^c \rightarrow E^u$ を定義でき, したがって, $W^c(0)$ 上では $y = g(x), z = h(x)$ と書くことができる。すなわち,

$$W^c(0) = \{(x, g(x), h(x))\}.$$

$W^c(0)$ は原点を通り, また, E^c に接するので $g(0) = h(0) = 0, g'(0) = h'(0) = 0$ となる。さらに, $W^c(0)$ は不変集合であるから, $(x, y, z) \in W^c(0)$ ならば流れも $\varphi_t(x, y, z) \in W^c(0)$ となる。これはベクトル場 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ は $W^c(0)$ の接空間になければならないことを意味している。強調して書くと $y(t) = g(x(t)), z(t) = h(x(t))$ であるからこれらを微分すると

$$\dot{y} = g'(x)\dot{x}, \quad \dot{z} = h'(x)\dot{x}$$

となり, これを (4.1) へ代入すると

$$\begin{cases} Sg(x) + G(x, g(x), h(x)) = g'(x)(Cx + F(x, g(x), h(x))), \\ Uh(x) + H(x, g(x), h(x)) = h'(x)(Cx + F(x, g(x), h(x))) \end{cases} \quad (4.2)$$

となり, (4.2) が g, h を決定するための方程式となる。中心多様体上の特性は

$$\dot{x} = Cx + F(x, g(x), h(x)) \quad (4.3)$$

で与えられる。

定理 4.2 ⁽⁷⁾ (4.1) は原点に平衡点を持つ C^1 ベクトル場とし, $F, G, H = o(x, y, z)$ とする。このとき原点のある近傍 U が存在し, $W^c(0) = \{(x, g(x), h(x)) : x \in E^c\} \cap U$ であり, U における特性は

$$\begin{cases} \dot{x} = Cx + F(x, g(x), h(x)), \\ \dot{y} = Sy, \\ \dot{z} = Uz \end{cases} \quad (4.4)$$

と位相共役^{*9}である。

注意 4.1 定理 4.2 は非双曲型平衡点の特性は中心多様体上の流れにより決定されることをものがたっている。

以下 3 次元の例を通して具体的な計算法を示す。

例 4.1

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + xz, \\ \dot{y} = 5x + y + yz, \\ \dot{z} = -z - x^2 - y^2 + z^2 \end{cases} \quad (4.5)$$

(4.5) の原点での特性を調べる。 x, y の線形化部分の係数行列は $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ であり、その

固有値は $\pm 3i$ となり、実固有ベクトルはたとえば、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と得られる。したがって、

変数変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

により、(4.5) はつぎのように書き換えることができる。

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi z \\ \eta z \end{pmatrix}, \\ \dot{z} = -z - (\xi + \eta)^2 - (\xi - 2\eta)^2 + z^2 \end{cases} \quad (4.7)$$

これより (ξ, η, z) 系において、

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} xz \\ yz \end{pmatrix}, S = -1, G = -(\xi + \eta)^2 - (\xi - 2\eta)^2 + z^2$$

を得る。したがって、 $E^c = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ となり、 $W^c(0, 0, 0)$ 上では $z = h(\xi, \eta)$ として

$$z = h(\xi, \eta) = \xi^2 k_1(\xi) + \eta^2 k_2(\eta) + \xi \eta k_3(\xi, \eta) \quad (4.8)$$

と書くことができる。これを (4.2) へ代入し h を決定するための方程式をつくるとつぎが得られる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2\xi k_1(\xi) + \xi^2 k_1'(\xi) + \eta k_3(\xi, \eta) + \xi \eta k_{3,\xi}(\xi, \eta) \\ 2\eta k_2(\eta) + \eta^2 k_2'(\eta) + \xi k_3(\xi, \eta) + \xi \eta k_{3,\eta}(\xi, \eta) \end{pmatrix}^T \times \\ & \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} (\xi^2 k_1(\xi) + \eta^2 k_2(\eta) + \xi \eta k_3(\xi, \eta)) \right\} \\ & = -(\xi^2 k_1(\xi) + \eta^2 k_2(\eta) + \xi \eta k_3(\xi, \eta)) - (\xi + \eta)^2 - (\xi - 2\eta)^2 + (\xi^2 k_1(\xi) + \eta^2 k_2(\eta) + \xi \eta k_3(\xi, \eta))^2 \end{aligned}$$

これより, 2 次項の係数を比較して

$$k_1(\xi) = -\frac{122}{37}, \quad k_2(\eta) = -\frac{137}{37}, \quad k_3(\xi, \eta) = -\frac{16}{37} \quad (4.9)$$

を得て, したがって,

$$h(\xi, \eta) = -\frac{122}{37}\xi^2 - \frac{137}{37}\eta^2 - \frac{16}{37}\xi\eta + O(\xi^m, \eta^n), \quad m, n \geq 0, \quad m+n=3 \quad (4.10)$$

という中心多様体を得ることができる。

つぎに, 求めた中心多様体を使い系の安定性を吟味する。(4.10) を (4.7) の (ξ, η) 系に代入すると

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 3\eta + \xi(\widehat{k}_1\xi^2 + \widehat{k}_2\eta^2 + \widehat{k}_3\xi\eta + O(\xi^m, \eta^n)) \\ \dot{\eta} = -3\xi + \eta(\widehat{k}_1\xi^2 + \widehat{k}_2\eta^2 + \widehat{k}_3\xi\eta + O(\xi^m, \eta^n)) \end{cases} \quad (4.11)$$

となる。ただし, $\widehat{k}_1 = -\frac{122}{37}$, $\widehat{k}_2 = -\frac{137}{37}$, $\widehat{k}_3 = -\frac{16}{37}$ とおいた。(4.11) を極座標系に変換すると

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3(\widehat{k}_1 \cos^2 \theta + \widehat{k}_2 \sin^2 \theta + \widehat{k}_3 \cos \theta \sin \theta) + O(r^4) \\ \dot{\theta} = -3 + O(\theta) \end{cases} \quad (4.12)$$

を得る。(4.12) の第 1 式にて r^3 の係数は

$$\begin{aligned} \widehat{k}_1 \cos^2 \theta + \widehat{k}_2 \sin^2 \theta + \widehat{k}_3 \cos \theta \sin \theta &= \left(\widehat{k}_2 - \frac{\widehat{k}_3^2}{4\widehat{k}_1}\right) \sin^2 \theta + \widehat{k}_1 \left(\cos \theta + \frac{\widehat{k}_3}{2\widehat{k}_1} \sin \theta\right)^2 \\ &= -\frac{225}{61} \sin^2 \theta - \frac{122}{37} \left(\cos \theta + \frac{\widehat{k}_3}{2\widehat{k}_1} \sin \theta\right)^2 \\ &< 0 \end{aligned}$$

となり, 系は (ξ, η) 系で安定 (原点は渦状沈点で回転方向は反時計回り) であり, したがって, 3 次元系全体で安定になっていることが分かる。

ちなみに, (x, y, z) 系での中心多様体は (4.10) を変数変換 (4.6) して

$$h(x, y) = -\frac{1}{37}(73x^2 + 22xy + 27y^2) + O(x^m, y^n) \quad (4.13)$$

となる。

図 4.1 に方程式 (4.5) の解軌跡を示す。 (x, y, z) 3 次元空間内の歪なお碗を伏せた形状が (4.13) で表せられる中心多様体である。初期値 $(0.3, 0.3, 0.5)$ からの解軌跡を太実線で示している。原点に近いところでは中心多様体面上をなぞりながら反時計方向で原点に向い渦を巻き収束している様子が分かる。また, 図 4.2 は図 4.1 の側面と上面から見た解軌跡を示している。■

注意 4.2 例 4.1 において中心多様体を得られたので, この中心多様体を使えば容易に Lyapunov 関数の構成が以下のように可能となる。すなわち, (ξ, η) 系において

$$V(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 \quad (4.14)$$

とすれば簡単な計算により

$$\dot{V} = (\xi^2 + \eta^2)z$$

が得られ、 z に (4.10) を代入すれば

$$\begin{aligned} &= (\xi^2 + \eta^2) \left(-\frac{122}{37}\xi^2 - \frac{137}{37}\eta^2 - \frac{16}{37}\xi\eta + O(\xi^m, \eta^n) \right) \\ &= -\frac{1}{37}(\xi^2 + \eta^2) \left\{ 122\left(\xi + \frac{4}{61}\eta\right)^2 + \frac{8325}{61}\eta^2 + O(\xi^m, \eta^n) \right\} \\ &< 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

となり、 (ξ, η) 系において原点近傍にて漸近安定であることが分かる。

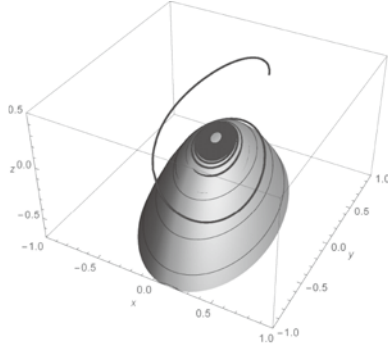


図 4.1 方程式 (4.5) の解軌跡： (x, y, z) 3 次元空間内の歪んでいるお椀を伏せた形状が中心多様体。初期値 $(0.3, 0.3, 0.5)$ からの界軌跡を太実線で示す。原点に近いところでは中心多様体面上をなぞりながら反時計方向で原点に渦を巻き収束していく様子が分かる。

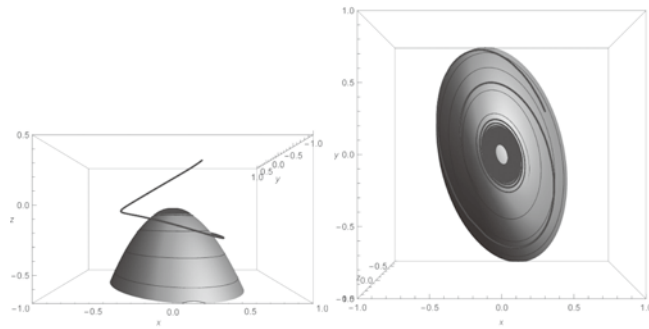


図 4.2 方程式 (4.5) の解軌跡：図 4.1 の側面と上面から見た解軌跡を示す。

注

- *1 本稿は 2017 年 10 月 16 日～30 日に実施した公開講座「中心多様体入門」の内容に加筆修正したものである。
- *2 機械にしても化学プラントにしてもすべてのシステムを安定にすることが制御系設計の第一目標である。安定とは、次節で定義するが平たく言えば、航空機では墜落せずに飛行することであり、原子力発電プラントでは熱暴走を起こさず商業運転をすることである。
- *3 Hartman-Grobman 定理による。⁽³⁾
- *4 1 次元多様体とは空間における点の集合において、各点が実数直線の开区間と同相な近傍をもつものであり、2 次元多様体とは各点が平面の開円板と同相な近傍をもつものである。分かりやすい例として、ユークリッド空間内の滑らかな曲線 (1 次元多様体) や球面やトーラスなどの曲面 (2 次元多様体) がある。⁽⁴⁾
- *5 E^S, E^U, E^C をそれぞれ安定固有空間, 不安定固有空間, 中立安定固有空間ということがある。
- *6 虚数の固有値に属する一般固有ベクトルの場合は、実部と虚部に分けて、それらで張られる空間を考える。
- *7 曲がった空間を表す n 次元多様体 M 上の点 x における接ベクトルの全体を $T_x M$ で表し、これを接空間という。ちなみに、曲がっていない平坦な多様体が Euclid 空間である。
- *8 x^* の適当な近傍 U が存在して、 $W^C(x^*) \cap U$ に初期値をもつ解は t を正方向および負方向に変化させたとき、 U 内で $W^C(x^*)$ からはみでることはない。
- *9 位相共役とは、2 つの流れを $\phi_t: A \rightarrow A, \psi_t: B \rightarrow B$ としたとき、 ϕ_t と ψ_t においてはすべての $x \in A$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$h(\phi_t(x)) = \psi_t(h(x))$$

が成立する同型写像 h (連続写像が全単写で逆写像も連続な写像) が存在することである。

参考文献

- (1) 伊藤正美 (1985); 自動制御概論 (上)・(下), 昭晃堂.
- (2) 俣野博 (2003); 常微分方程式入門, 岩波書店.
- (3) 野原勉 (2013); 応用微分方程式講義, 東京大学出版会.
- (4) 松本幸夫 (1988); 多様体の基礎, 東京大学出版会.
- (5) Carr, J.(1981); *Applications of Centre Manifold Theory*, New York, Springer-Verlag.
- (6) Doyle, J.C., Francis, B.A., Tannenbaum, A.R.(1990); *Feedback Control Theory*, Dover Publications.
- (7) Meiss, J.D.(2007); *Differential Dynamical Systems*, Philadelphia, SIAM.
- (8) Schultz, D.G., Melsa, J. L.(1967); *State Functions and Linear Control Systems*, McGraw-Hill Book Company.